

Управление образования администрации
Кудымкарского муниципального округа Пермского края

**Муниципальный конкурс исследовательских и проектных работ
обучающихся образовательных учреждений**

Муниципальное автономное образовательное учреждение
«Белоевская средняя общеобразовательная школа»

Физика, информатика

Учебно-исследовательский проект

**Разработка компьютерной модели движения
брошенного под углом к горизонту тела**

Работу выполнил
Чакилев Антон,
ученик 10 класса
Руководитель:
Устинов В. Г., учитель
физики и информатики,
Заслуженный учитель РФ

Содержание

	стр.
Введение_____	3
Физический принцип независимости движений. Разработка математической модели движения, брошенного под углом к горизонту тела_____	4
Уравнение траектории движения тела. Важные характеристики движения_____	6
Дальность полёта_____	7
Максимальная высота полёта_____	8
Код компьютерной модели «Движение брошенного под углом к горизонту тела» на языке программирования Python_____	9
Результат работы программы для скорости бросания 20 м/с и 40 м/с_	11
Практическое применение знания законов движения тела, брошенного под углом к горизонту_____	12
Выводы. Заключение. _____	13
Библиографический список _____	14

Введение

Движение тела, брошенного под углом к горизонту — распространённое физическое явление. С этим движением мы часто встречаемся в жизни: движение брошенного мяча, теннисного шарика, стрелы, выпущенной из лука, движение человека во время прыжка в длину, движение струи жидкости из шланга, движение пули, снаряда и т.д. Умение рассчитывать это движение важно для решения задач на уроках физики, важно для инженерных расчётов, в спорте, в военном деле.

Цель проекта: создать компьютерную модель движения, брошенного под углом к горизонту тела, провести эксперименты с компьютерной моделью.

Задачи проекта:

- повторить тему школьного курса физики «Движения тела в поле силы тяжести»
- на основе законов механики провести математический анализ движения тела, брошенного под углом к горизонту.
- вывести уравнения для координат и скорости, формулы для ключевых характеристик (дальность, высота, время полёта)
- построить математическую модель движения
- на основе математической модели, создать компьютерную модель движения тела, брошенного под углом к горизонту
- провести эксперименты на компьютерной модели
- выяснить влияние угла бросания, начальной скорости и других факторов на траекторию полёта.

Физический принцип независимости движений

Принцип независимости движения в физике: если тело участвует одновременно в нескольких движениях, то каждое из этих движений происходит независимо от других.

В соответствии с этим принципом, движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно разложить на два независимых движения:

1. Горизонтальное движение (вдоль оси X) — с постоянной скоростью
2. Вертикальное движение (вдоль оси Y) — равноускоренное движение с ускорением $g = 9,81 \frac{м}{с^2}$, (рис. 1)

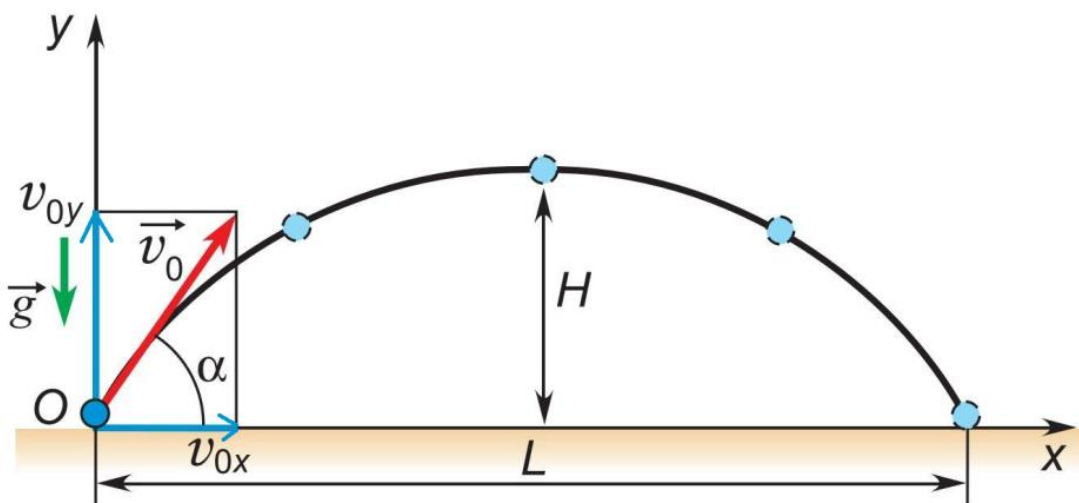


Рис. 1

Разработка математической модели движения, брошенного под углом к горизонту тела

Выберем прямоугольную систему координат: начало координат в точке броска, ось X направлена горизонтально в направлении движения, ось Y направлена вертикально вверх, ускорение свободного падения направлено вниз и равно $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ (см.рис.1)

Пусть тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту с поверхности земли ($h_0 = 0$).

Найдём проекции начальной скорости на ось x и на ось y .

Из прямоугольного треугольника, построенного из вектора начальной скорости и его проекцией на ось x , получим $\frac{v_{0x}}{v_0} = \cos \alpha$.

Горизонтальная проекция начальной скорости равна:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

Аналогично, $\frac{v_{0y}}{v_0} = \sin \alpha$, вертикальная проекция начальной скорости равна:

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Уравнения изменения координат x и y с течением времени:

Для упрощения расчётов в нашем виртуальном эксперименте мы пренебрегаем сопротивлением воздуха, поэтому горизонтальную скорость движения будем считать постоянной, уравнение для координаты x , движущегося тела: $x(t) = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha$

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha$$

Вертикальное движение происходит равноускорено с ускорением

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

Первую половину времени тело движется вверх, скорость тела уменьшается до нуля, затем оно движется вниз, скорость тела увеличивается до момента удара о поверхность земли.

Уравнение равноускоренного движения тела вдоль оси y :

$$y(t) = v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Уравнения зависимости скорости движения от времени:

Горизонтальная скорость (параллельна оси x , не зависит от времени):

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha$$

Вертикальная скорость изменяется с течением времени по закону:

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt$$

(см. рис.2)

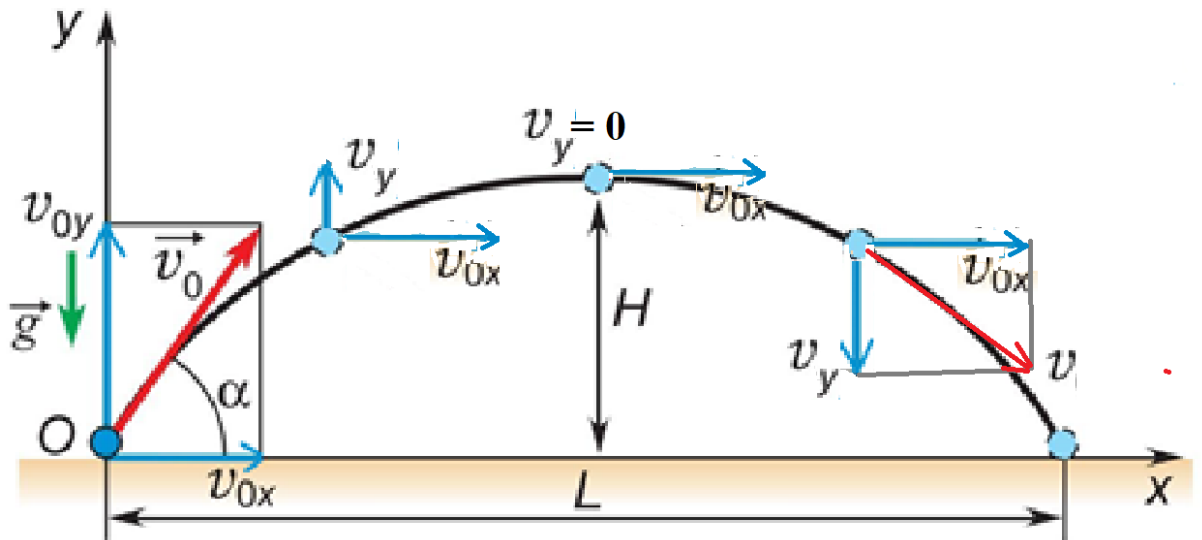


Рис. 2

Модуль скорости найдём по теореме Пифагора:

$$v(t)^2 = v_{0x}^2 + v_y^2$$

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 \cos^2(\alpha) + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}$$

Уравнение траектории движения тела

Исключив переменную времени t из уравнений $x(t)$ и $y(t)$, получим уравнение траектории:

$$y(x) = x \tan(\alpha) - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

Это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз.

Важные характеристики движения

Время полёта определяется из условия: координата $y(t) = 0$ (в момент бросания тела и в момент, когда тело упало на землю):

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$0 = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$0 = t \cdot (v_0 \sin \alpha - \frac{gt}{2})$$

Уравнение имеет два решения: $t = 0$, момент броска и **время полёта**:

$$0 = v_0 \sin \alpha - \frac{gt}{2}$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Дальность полёта

Подставляя время полёта t

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

в уравнение $x(t)$:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha$$

Получим значение координаты x в момент падения тела на землю:

$$x(t) = \frac{2v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g}$$

Упростим выражение, используя тригонометрическую формулу:

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

Получим уравнение для расчёта максимальной дальности полёта $L = x(t)$:

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

Значение данной функции максимально при значении угла $\alpha = 45^\circ$, следовательно, **дальность полёта тела максимальна при угле бросания 45°** и равна:

$$L_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Максимальная высота полёта

Максимальная высота достигается, когда вертикальная скорость в верхней точке траектории $v_y(t) = 0$. Из уравнения вертикальной скорости:

$$v_y(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

$$0 = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Получим время полёта до верхней точки траектории

$$t_{\uparrow} = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Подставим это время в уравнение для координаты $y(t)$:

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$y(t) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

Максимальная высота полёта H_{max} равна:

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

Компьютерная модель движения брошенного под углом к горизонту тела на языке программирования Python

Python - популярный язык программирования, применим для решения разнообразных задач. Программа на Python представляет собой обычный текстовый файл. Код можно писать практически в любом редакторе, стандартный текстовый редактор IDLE имеется в составе системы программирования.

Благодаря лаконичности, простому синтаксису и богатому набору инструментов Python стал любимым языком учёных. Есть специальные библиотеки для Python, которые позволяют строить графики, проводить исследования и вычисления:

SciPy — набор инструментов для научных вычислений.

NumPy — расширение, которое позволяет оперировать матрицами и многомерными массивами.

pandas — библиотека для аналитики данных.

Matplotlib — библиотека для построения графиков различной сложности.

импорт NumPy — библиотеки для работы с многомерными массивами,
наборами связанных между собой данных

Код компьютерной модели «Движение брошенного под углом к горизонту тела» на языке программирования Python

```
# импорт NumPy — библиотеки для работы с многомерными массивами,  
# наборами связанных между собой данных
```

```
import numpy as np
```

```
# импорт модуля Pyplot библиотеки Matplotlib для визуализации данных  
# Pyplot — модуль, который помогает автоматически создавать оси,  
# фигуры и другие компоненты графиков.
```

```
# В коде Pyplot отображается как matplotlib.pyplot
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Параметры движения
```

```
g = 9.8 # ускорение свободного падения, м/с2
```

```
v0 = 20 # начальная скорость, м/с
```

```
h0 = 0 # начальная высота, м
```

```
# # углы броска в градусах
```

```
angles = np.array([15, 30, 45, 60, 75])
```

```

# Преобразование углов в радианы
alphas = np.radians(angles)

# следующая функция в библиотеке Matplotlib
# создаёт график размером 10×6 дюймов
plt.figure(figsize=(10, 6))

# Цикл по различным углам
for alpha in alphas:
    # Время полета до возврата на уровень h0
    t_flight = 2*v0*np.sin(alpha)/g

    # Массив времени
    t = np.linspace(0,t_flight,500)

    # Уравнения траектории соответствующие математической модели
    x = v0*np.cos(alpha)*t
    y = h0+v0*np.sin(alpha)*t-0.5*g*t**2

    # Рисование траектории
    plt.plot(x, y, label=f'{angles[np.where(alphas == alpha)[0][0]]}°')

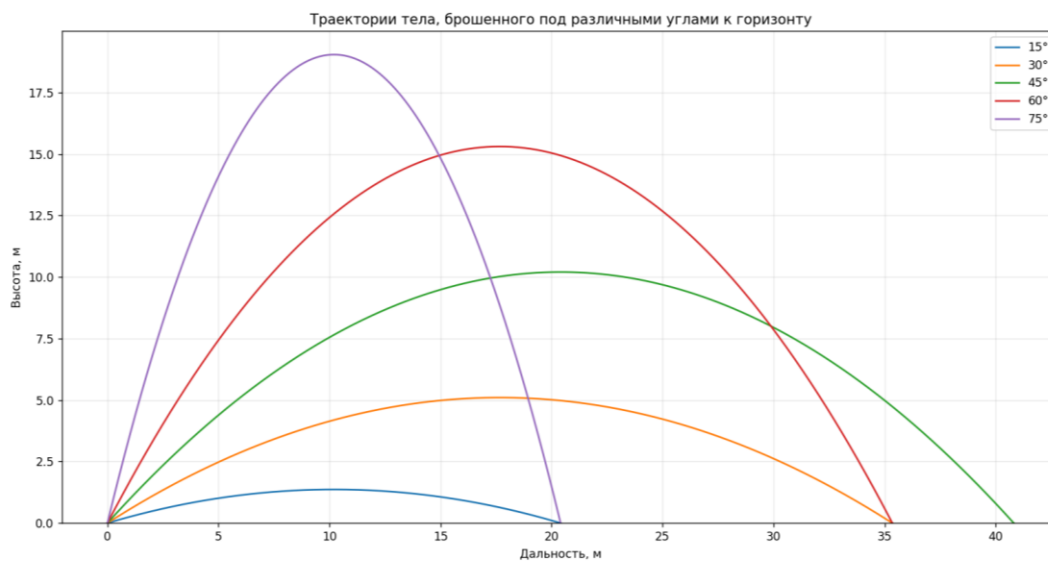
# Настройка графика
plt.xlabel('Дальность, м')
plt.ylabel('Высота, м')
plt.title('Траектории тела, брошенного под различными углами к горизонту')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend()
plt.ylim(0)
plt.show()

# Вывод дальностей полета
print("Дальности полета для разных углов:")
for i, alpha in enumerate(alphas):
    range_flight = v0**2 * np.sin(2*alpha) / g
    print(f"Угол {angles[i]}°: {range_flight:.1f} м")

```

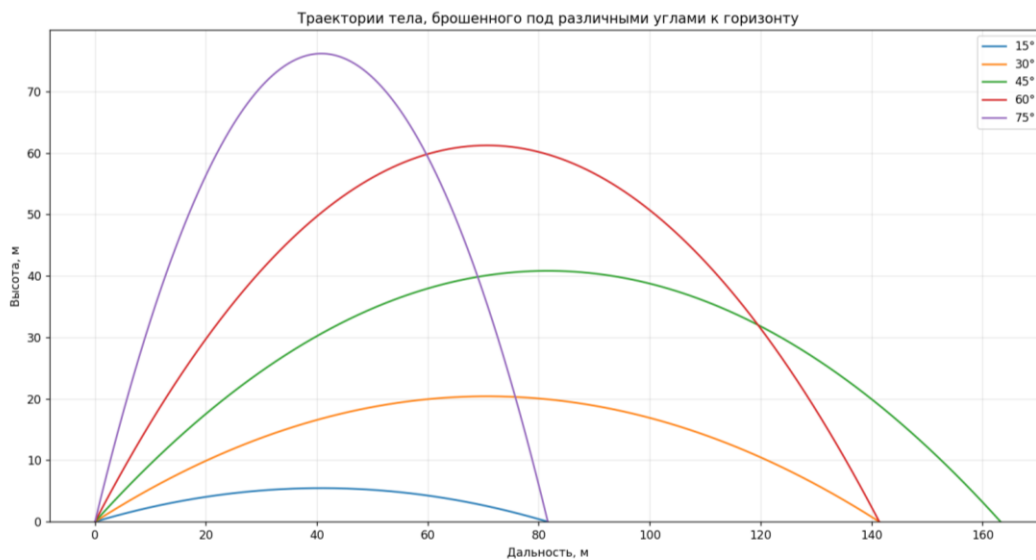
Примечание: для корректной работы программы, на компьютере должна быть операционная система не ниже Windows 10, установлена версия Python 3.14, в систему программирования Python необходимо установить библиотеки NumPy и NumPy с модулем Pyplot.

Результат работы программы для скорости бросания 20 м/с



Максимальная дальность полёта $L = 40$ м достигается при угле бросания 45° .
Верхняя точка траектории находится на высоте 18 м

Результат работы программы для скорости бросания 40 м/с (в код программы в строке $v0 = 20$, #м/с записали $v0 = 40$ #м/с)



Максимальная дальность полёта $L = 160$ м достигается при угле бросания 45° .
Верхняя точка траектории находится на высоте 75 м

Практическое применение знания законов движения брошенного под углом к горизонту тела

В спорте:

- Игра в теннис, волейбол, футбол, баскетбол, дальность полёта мяча зависит от угла бросания.
- бросание ядра, анализ оптимального угла с учётом высоты выпуска (обычно $40-45^\circ$)
- Прыжок в длину, максимальный результат достигается при угле отталкивания около 45°
- Стрельба из лука, расчёт угла для поражения цели на определённом расстоянии с учётом начальной скорости стрелы

В баллистике:

- расчёт параметров полёта снарядов, определение дальности и точности стрельбы

В инженерии:

- проектирование фонтанов, расчёт траекторий при конструировании различных механизмов.

Компьютерная модель может быть использована на уроках физики при изучении темы «Движение брошенного под углом к горизонту тела»

Выводы:

1. Движение под углом можно разложить на два независимых одномерных движения: горизонтальное равномерное и вертикальное равноускоренное.

2. Траектория движения — это парабола, симметричная относительно вершины.

3. Дальность полёта максимальна при $\alpha = 45^\circ$ и равна

$$L_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

4. Параметры траектории полёта зависят от угла бросания и начальной скорости тела.

5. Знание законов движения тела, брошенного под углом к горизонту, применяется во многих сферах: от спорта до баллистики и инженерных расчётов.

Заключение

В процессе работы над проектом

- выяснил, как работают законы механики для брошенного под углом к горизонту тела,
- научился описывать это движение на языке математики,
- научился создавать компьютерную модель на основе математической модели,
- получил навыки создания кода программы на языке программирования Python, использования библиотек языка для работы с многомерными массивами и визуализации данных,
- получил навыки написания формул в текстовом редакторе.

Библиографический список

1. Devpractice. Разработка программного обеспечения, технологии и наука [Электронный ресурс] <https://devpractice.ru/matplotlib-lesson-1-quick-start-guide/>
2. Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, Н. Н. Скотский «Физика. 10 класс, базовый и углублённый курс», Москва, «Просвещение», 2024
3. Interneturok. Библиотека видео уроков. Кинематика точки и твердого тела. Профильный уровень. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. [Электронный ресурс]
<https://interneturok.ru/lesson/physics/10-klass/effektivnye-kursy/kinematika-tochki-i-tverdogo-tela-profilnyy-uroven-chast-5-dvizhenie-tela-broshennogo-pod-uglom-k-gorizontu>